

文章编号 1004-924X(2007)05-0656-06

光在多层不匹配介质中的稳态传输

王喜昌, 范文强, 吴现成

(烟台大学 光电信息学院, 山东 烟台, 264005)

摘要:分析了光在多层不匹配折射率介质中的漫射方程,给出了精确的漫射方程解。用蒙特卡罗方法检验了稳态的漫射方程。通过与多层介质的空间分辨漫反射蒙特卡罗方法的比较,验证了方法的正确性。讨论了有限尺寸光源和折射率的变化对空间分辨漫反射的影响。实验结果表明,折射率的变化对漫射的影响会因折射率的不同而不同,折射率在 1.35~1.45 之间变化时,最大误差为 7%。

关键词:组织光学;光传输;漫射方程;吸收和散射

中图分类号:Q63;O436.2 **文献标识码:**A

Steady-state photon transport in multi-layered mismatched medium

WANG Xi-chang, FAN Wen-qiang, WU Xian-cheng

(Department of Physics, Yantai University, Yantai 264005, China)

Abstract: The diffusion equation of the photon transport in a multi-layered medium with mismatched refractive index is analyzed, and the accurate solution of the diffuse equation is set up. The equation is checked by Monte-Carlo simulation. The comparison between the spatially resolved reflectance of mismatched media and Monte-Carlo simulation shows an excellent agreement between our theory and Monte-Carlo simulation. Meanwhile, the effect of the variety of refractive index on spatially resolved reflectance caused by finite size flat beam is discussed. Experimental results show that diffuse result changes with the variety of the refractive index, while the refractive index is changed at the range of 1.35~1.45, and the maximum error is 7%.

Key words: tissue optics; diffuse equation; absorption and scattering

1 引言

在医学领域,光在组织中传输的研究在世界上引起了越来越多的关注,激光和组织之间的吸收和散射研究尤其惹人注目。分析和确定表面组织的特性,便于确定生物活组织是否发生病

理变化,从而可以实现生物活组织的无损探测^[1-3]。

人们已经研究了几种模型描述光在组织中的传输。波尔兹曼方程的传输理论能够处理微积分形式,但只适用于对特殊几何与边界条件进行研究。漫射方程是应用传输理论去研究光在组织中传播的简化方法,它对于高散射介质具有很好的

效果。和传输方程相比,漫射方程的数学处理比较容易,因而漫射方程已经成为目前理论预测的标准。

目前,应用较广泛的是半无限厚光迁移模型。王喜昌等人^[4,5]第一次使用漫射方程精确地解决了三层混浊介质模型,但是多层介质问题仍有待研究。至今,还未有使用漫射方程解决 n 层方面的任何报道。

人们常常用蒙特卡罗模拟研究光在多层介质中的传输。王建岗^[6,7]等人进行了光在分层介质中传输行为的蒙特卡罗模拟,但是这种方法耗时较多,通常用来检测漫射方程的正确性。程树英等人^[8]用蒙特卡罗方法研究了折射率对光在组织中的漫反射率和吸收比的影响,许棠等人^[9]研究了连续光在生物组织中能流率分布的漫射近似和模拟,这些计算均采用蒙特卡罗模拟方法,但是蒙特卡罗模拟存在计算时间长等问题,没有理论上给出的方便、快速、适时,不能用来提取组织的光学特性,通常只用来验证理论的正确性。

实际上,表面组织是一种多层结构的介质,在每层中(i 层)中有不同的吸收系数和散射系数。如王建岗^[4,5]等人认为皮肤表面是四层介质,而 R. Lohwasser^[10]认为成年人头由五层介质组成。

$$\phi_1(z, s) = \frac{\sinh(a_1(z_b + z_0))}{D_1 a_1} \times \frac{D_1 a_1 N_1^2 l_1 \cosh(a_1(L_1 - z)) + D_2 a_2 N_2^2 m_1 \sinh(a_1(L_1 - z))}{D_1 a_1 N_1^2 l_1 \cosh(a_1(L_1 + z_b)) + D_2 a_2 N_2^2 m_1 \sinh(a_1(L_1 + z_b))} - \frac{\sinh(a_1(z_0 - z))}{D_1 a_1}, \quad (2)$$

$$0 \leq z < z_0$$

$$\phi_1(z, s) = \frac{\sinh(a_1(z_b + z_0))}{D_1 a_1} \times \frac{D_1 a_1 N_1^2 l_1 \cosh(a_1(L_1 - z)) + D_2 a_2 N_2^2 m_1 \sinh(a_1(L_1 - z))}{D_1 a_1 N_1^2 l_1 \cosh(a_1(L_1 + z_b)) + D_2 a_2 N_2^2 m_1 \sinh(a_1(L_1 + z_b))}, \quad (3)$$

$$z_0 \leq z < L_1$$

$$\phi_{i+1}(z, s) = \frac{N_{i+1}^2 \sinh(a_1(z_b + z_0)) X(D_i a_i N_i^2 l_i)}{N_1^2 D_1 a_1 X(h_i)} \times \frac{[D_{i+1} a_{i+1} N_{i+1}^2 l_{i+1} \cosh(a_{i+1}(L_{i+1} - z)) + D_{i+2} a_{i+2} N_{i+2}^2 m_{i+1} \sinh(a_{i+1}(L_{i+1} - z))]}{D_{i+1} a_{i+1} N_{i+1}^2 l_{i+1} \cosh(a_{i+1}(L_{i+1} - L_i)) + D_{i+2} a_{i+2} N_{i+2}^2 m_{i+1} \sinh(a_{i+1}(L_{i+1} - L_i))} \quad (4)$$

$$2 \leq i + 1 \leq n - 1,$$

$$\phi_n(z, s) = \frac{N_n^2 \sinh(a_1(z_b + z_0))}{N_1^2 D_1 a_1} \times \frac{X(D_{n-1} a_{n-1} N_{n-1}^2 l_{n-1})}{X(h_{n-1})} \times \exp(a_3(L_{n-1} - z)), \quad (5)$$

$$\text{其中, } m_{n-1} = 1, l_{n-1} = 1, \quad (6)$$

$$m_{n-2} = D_n a_n N_n^2 \cosh(a_{n-1}(L_{n-1} - L_{n-2})) + D_{n-1} a_{n-1} N_{n-1}^2 \sinh(a_{n-1}(L_{n-1} - L_{n-2})), \quad (7)$$

$$l_{n-2} = D_n a_n N_n^2 \sinh(a_{n-1}(L_{n-1} - L_{n-2})) + D_{n-1} a_{n-1} N_{n-1}^2 \cosh(a_{n-1}(L_{n-1} - L_{n-2})), \quad (8)$$

$$m_i = D_{i+1} a_{i+1} N_{i+1}^2 l_{i+1} \sinh(a_{i+1}(L_{i+1} - L_i)) + D_{i+2} a_{i+2} N_{i+2}^2 m_{i+1} \cosh(a_{i+1}(L_{i+1} - L_i)), \quad (9)$$

$$l_i = D_{i+1} a_{i+1} N_{i+1}^2 l_{i+1} \cosh(a_{i+1}(L_{i+1} - L_i)) + D_{i+2} a_{i+2} N_{i+2}^2 m_{i+1} \sinh(a_{i+1}(L_{i+1} - L_i)), \quad (10)$$

本文建立了 n 层介质漫射模型,用来求解 n 层介质漫射方程。使用蒙特卡罗方法来检测提出的方程,并根据此方程,讨论折射率对空间分辨漫反射的影响。鉴于上述文献中使用的无限细光束^[4-10],讨论了面光源(高斯光束和圆形光束)对漫射方程的影响。

2 n 层混浊介质公式

如果组织为多层介质,每层介质有不同的光学参数,设 $D_i = 1/3(\mu_{si}' + \mu_{ai})$ 为第 i 层介质漫射系数, μ_{ai} 为第 i 层的吸收系数, N_i 为折射率,每层厚度为 L_i 。一束光垂直照射在 n 层混浊介质中,光束在深度 $z = z_0 = 1/(\mu_{s1}' + \mu_{a1})$ 的最上层介质上被散射, μ_{si}' 是第 i 层等效各向同性散射系数,其表达式为 $\mu_{si}' = \mu_s(1 - g)$, μ_s 是散射系数, g 为探测角的平均余弦。使用外推边界条件和不匹配介质边界条件,通过傅立叶变换和拉普拉斯变换,可得到能流率漫射方程的解:

$$\Phi_i(\rho, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \phi_i(z, s) s J_0(s\rho) ds, \quad (1)$$

其中,

$$X(D_i a_i N_i^2 l_i) = (D_1 a_1 N_1^2 l_1) \times (D_2 a_2 N_2^2 l_2) \times (\Delta) \times D_i a_i N_i^2 l_i, \quad (11)$$

$$h_1 = D_1 a_1 N_1^2 l_1 \cosh(a_1 (L_1 + z_b)) + D_2 a_2 N_2^2 m_1 \sinh(a_1 (L_1 + z_b)), \quad (12)$$

$$h_i = D_i a_i N_i^2 l_i \cosh(a_i (L_i - L_{i-1})) + D_{i+1} a_{i+1} N_{i+1}^2 m_i \sinh(a_i (L_i - L_{i-1})), \quad (13)$$

$$X h_i = h_1 \times h_2 \times (\Delta) \times h_i, \quad (14)$$

$$a_i^2 = (D_i s^2 + \mu_{ai}) / D_i. \quad (15)$$

方程

$$z_b = \frac{1 + R_{\text{eff}}}{1 - R_{\text{eff}}} 2D_1, \quad (16)$$

R_{eff} 表示在边界处的等效反射系数^[9,10]。

使用此方程可计算和分析组织的空间分辨漫反射,在计算空间分辨漫反射时只用到表层介质的能流率方程,也就是式(1)和(2),空间分辨漫反射可按下面的方程计算^[11,12]:

$$R(\rho) = \int_{2\pi} d\Omega [1 - R_{\text{ires}}(\theta)] \times \frac{1}{4\pi} [\Phi_1(\rho, z=0) + 3D_1 \frac{\partial \Phi_1(\rho, z=0)}{\partial z} \cos \theta] \times \cos \theta, \quad (17)$$

3 漫射方程和蒙特卡罗模拟的比较

将五层介质和六层介质漫射方程的结果和蒙特卡罗模拟进行比较,根据式(17)计算漫空间分辨漫反射:

图 1 显示了五层混浊介质的空间分辨漫反射 $R(\rho)$, 他们的参数为

$$\mu_{a1} = 0.02 \text{ mm}^{-1}, \mu_{s1}' = 1.0 \text{ mm}^{-1}, L_1 = 1 \text{ mm},$$

$$\mu_{a2} = 0.015 \text{ mm}^{-1}, \mu_{s2}' = 1.0 \text{ mm}^{-1}, L_2 = 2 \text{ mm},$$

$$\mu_{a3} = 0.02 \text{ mm}^{-1}, \mu_{s3}' = 1.3 \text{ mm}^{-1}, L_3 = 3 \text{ mm},$$

$$\mu_{a4} = 0.015 \text{ mm}^{-1}, \mu_{s4}' = 0.9 \text{ mm}^{-1}, L_4 = 1 \text{ mm},$$

$$\mu_{a5} = 0.01 \text{ mm}^{-1} \text{ 和 } \mu_{s5}' = 0.7 \text{ mm}^{-1}, \text{ 折射率全部}$$

为 1.3, 直线表示漫射方程的结果, 符号(\times)表示蒙特卡罗模拟的结果。

图 2 显示了六层混浊介质的空间分辨漫反射 $R(\rho)$, 他们的参数为

$$\mu_{a1} = 0.02 \text{ mm}^{-1}, \mu_{s1}' = 1.0 \text{ mm}^{-1}, L_1 = 2 \text{ mm},$$

$$\mu_{a2} = 0.01 \text{ mm}^{-1}, \mu_{s2}' = 1.2 \text{ mm}^{-1}, L_2 = 2 \text{ mm},$$

$$\mu_{a3} = 0.01 \text{ mm}^{-1}, \mu_{s3}' = 1.0 \text{ mm}^{-1}, L_3 = 2 \text{ mm},$$

$$\mu_{a4} = 0.02 \text{ mm}^{-1}, \mu_{s4}' = 1.3 \text{ mm}^{-1}, L_4 = 3 \text{ mm},$$

$$\mu_{a5} = 0.01 \text{ mm}^{-1}, \mu_{s5}' = 0.8 \text{ mm}^{-1}, L_5 = 1 \text{ mm},$$

$$\mu_{a6} = 0.01 \text{ mm}^{-1} \text{ 和 } \mu_{s6}' = 0.7 \text{ mm}^{-1}, \text{ 折射率全部}$$

为 1.4, 直线表示漫射方程的结果, 符号(\times)表示蒙特卡罗模拟的结果。

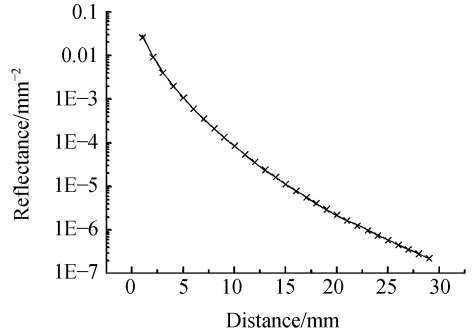


图 1 稳态空间分辨漫反射(\times)与蒙特卡罗模拟的比较(线)

Fig. 1 Comparison of steady-state spatially resolved reflectance calculated with Eq. (17) (\times) to Monte Carlo simulation(line)

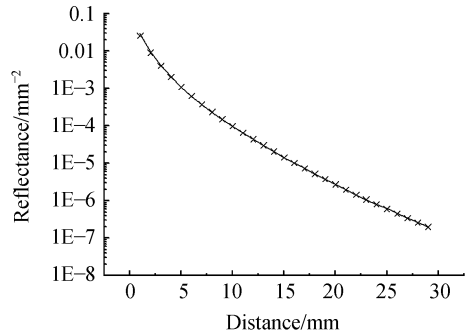


图 2 稳态空间分辨漫反射(\times)与蒙特卡罗模拟的比较(线)

Fig. 2 Comparison of the steady-state spatially resolved reflectance calculated with Eq. (28) (\times) to Monte Carlo simulation(line)

在图 1 和图 2, 多层介质漫射方程的空间分辨漫反射与蒙特卡罗模拟高度一致, 说明了提出的漫射方程的正确性。

4 折射率对表面分辨漫反射的影响

图 3 为五层介质漫射方程第一层折射率变化的结果, 这五层介质光学参数为每层的 μ_s' 全部为 1.2 mm^{-1} , 吸收系数分别为 $\mu_{a1} = 0.01 \text{ mm}^{-1}$,

$\mu_{a2} = 0.015 \text{ mm}^{-1}$, $\mu_{a3} = 0.01 \text{ mm}^{-1}$, $\mu_{a4} = 0.02 \text{ mm}^{-1}$, $\mu_{a5} = 0.01 \text{ mm}^{-1}$, 每层的厚度为 2 mm, 第二层到第五层的折射率为 1.4, 如果第一层折射率发生变化, 其折射率分别为 1.3, 1.35, 1.4, 1.45 和 1.5。根据漫射方程, 可以算出空间分辨漫反射。图 3 给出了空间分辨漫反射的结果, 可以看出折射率变化引起的漫反射的结果几乎相同, 只是有些轻微的变化。为更好地了解折射率变化对漫射的影响, 计算了各种折射率变化的漫反射率与折射率为 1.4 的漫反射率的比值, 得到图 4。

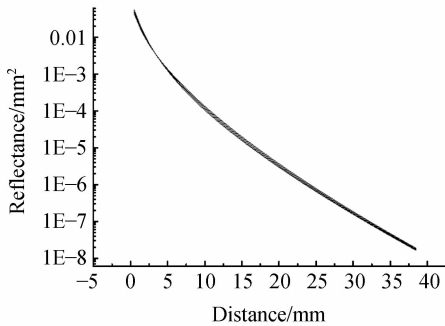


图 3 反射率和折射率之间的关系

Fig. 3 Relationship between reflectance and refractive index

图 4 为不同折射率之间漫反射的比值。图中可以看到不同折射率引起漫反射的变化。其中折射率最大值的的变化在 7~13 mm, 折射率为 1.5 的漫反射率变化最大, 接近于 15%。折射率为 1.3 的漫反射率变化最大值接近 13%。由此可见, 折射率为 1.3 和 1.5 的变化对漫反射率有较大的影响。折射率为 1.35 的漫反射率的最大值的比值为 6%, 折射率为 1.45 的漫反射率的最大值的比值为 7%, 而且除去 7~13 mm, 折射率变化引起的漫反射率变化小于 5%。

一些文献认为组织为匹配介质, 折射率在 1.3~1.5 之间变化, 对漫反射率的结果影响不大。还有人认为很多组织折射率在 1.35~1.45 之间, 基本没有影响。本文的计算表明, 折射率的变化对漫射的结果会由于折射率的不同而不同。折射率在 1.35~1.45 之间变化时, 最大误差为 7%。折射率超过 1.35~1.45 时, 折射率变化的影响增大。

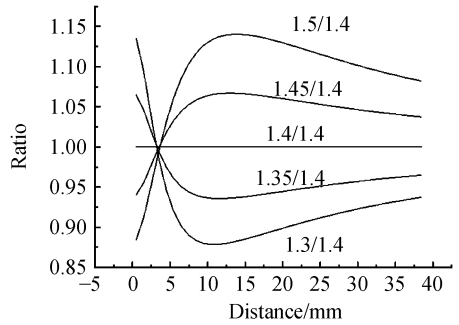


图 4 不同的折射率和折射率为 1.4 的反射率的比值

Fig. 4 Reflectance ratio between difference refractive indexes and refractive index 1.4

5 光源宽度变化对漫射方程的影响

对无限细光束, 可以将其看成格林函数的解, 对于高斯光束, 高斯半径为 R ,

$$\Phi(r, z) = S(r) \int_0^{\infty} G(r', z) \exp(-2(r'/R)^2 I_0(4rr'/R^2) 2\pi r' dr' , \tag{18}$$

其中, I_0 是零阶修正贝塞尔函数。

如果光束为圆形各向同性半径为 R 的准直光束,

$$\Phi(r, z) = P/(\pi R^2) \int_0^{\infty} G(r', z) I_0(r, r') 2\pi r' dr' , \tag{19}$$

函数 $I(r, r')$ 为

$$I_{\theta}(r, r') = \begin{cases} 1 & R > r + r' \\ \frac{1}{\pi} \cos^{-1}((r^2 + r'^2 - R^2)/(2rr')) & |r - r'| < R < r + r' \\ 0 & R < |r - r'| \end{cases}$$

由此, 建立了有限宽光束的解, 计算和验证有限宽光束的解如下。

图 5 和图 1 有相同的光学参数, 入射能量为 1 mJ, 光源为圆形, 光源半径分别为 2 mm, 5 mm 和 10 mm。图中三角形为蒙特卡罗模拟的结果, 曲线为漫射方程的结果。从曲线可以看出光源的半径不同, 漫反射率也会具有较大的差异。半径越小, 靠近原点处的漫反射率相对越大, 远离远点处光源的漫反射率相对越小。对于圆形光源, 半

径越大,靠近中心处越接近于直线。

图 6 是高斯光源和圆形光源比较的结果,其光学参数和图 5 相同。虚线是光源为高斯分布的结果,实线是光源为圆形分布的结果。

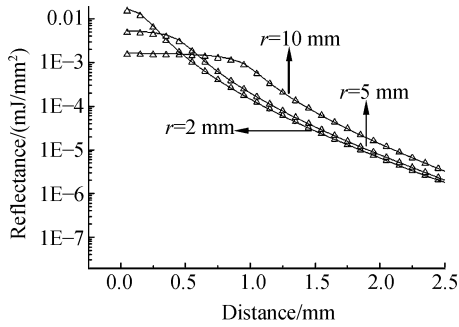


图 5 反射率和光源直径的关系

Fig. 5 Relationship between reflectance and radius of light source

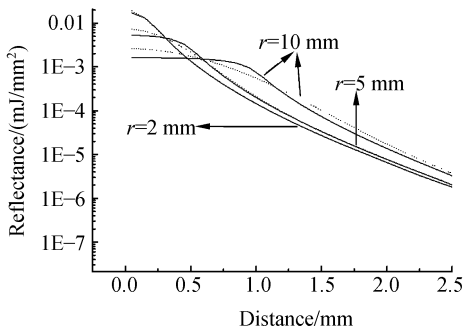


图 6 高斯光束和圆形光束的比较

Fig. 6 Comparison between Gaussian beams and circularly flat beams

从图 6 可看出,高斯光源和圆形光源在光源半径较小时,几乎没有区别。光源半径为 2 mm 时,两条曲线基本重合。半径相对增加时,靠近原点处,开始有明显的差异,如光源半径为 5 mm 时,半径越大,高斯光源和圆形光源的空间漫反射率的差异越大。

6 结 论

本文给出了 n 层匹配介质的漫射方程的精确解。由于蒙特卡罗方法是研究光在组织中传播的一个简单、有效且精度较高的工具,本文使用蒙特卡罗模拟验证 n 层匹配介质的漫射模型,通过五层和六层漫射方程的解和蒙特卡罗方法的比较,发现在稳态下,本文提出的漫射方程和蒙特卡罗模拟高度符合,说明所建立的漫射方程是有效的。

目前的漫射方程,最多为三层介质方程,而对于多层介质问题,常常采用耗时的蒙特卡罗模拟,但该模拟不能够解决逆向问题,利用本文建立的多层介质漫射方程,解决了多层介质的逆向问题。

本文建立的是不匹配介质的漫射方程,可以解决不匹配介质问题。对不匹配介质的折射率变化进行了初步的讨论,这些讨论,在解决逆向问题时能够用来判断对提取生物组织光学特性的影响。

本文亦建立了高斯光束和圆形光束分布的漫射模型,比较了高斯光束和圆形光束的差异。

本文提出的方程不仅能够解决前人尚未解决的多层介质问题,而且在生物诊断和研究中提取组织中的光学参数方面具有潜在的应用价值。

参考文献:

- [1] 胡海峰,姚建铨,张帆. 利用 Monte-Carlo 模拟技术研究 OCT 图像对比度[J]. 光学精密工程, 2004, 12(1): 94-99. HU H F, YAO J Q, ZHUANG F. Application of Monte Carlo simulation technology in OCT imaging contrast[J]. *Opt. Precision Eng.*, 2004, 12(1): 94-99. (in Chinese)
- [2] 王建设. 空间光学遥感器轨道外热流的模拟 [J]. 光学 精密工程 2000, 8(4): 328-331. WANG J SH. Simulation of orbit external thermal flux of a space optical remote sensor[J], *Opt. Precision Eng.*, 2000, 8(4): 328-331. (in Chinese)
- [3] 佟首峰,阮锦,郝志航. CCD 图像传感器降噪技术的研究 [J]. 光学 精密工程, 2000, 8(2): 140-146. TONG SH F, RUAN J, HAO ZH H. Noise reducing scheme on output signal of CCD[J]. *Opt. Precision Eng.*, 2000, 8(2): 328-331. (in Chinese)
- [4] 王喜昌,宫彦军,宋东草,等. 平稳状态下匹配介质三层漫射方程的空间分辨漫反射[J]. 光学学报, 2005, 25(3): 377-381.

- WANG X CH, GONG Y J, SONG D C, *et al.*. The spatially resolved scattered reflection of three-layered matched media diffusion equation in the steady-state[J]. *Acta Optica Sinica*, 2005, 25(3):377-381. (in Chinese)
- [5] 王喜昌,宋东草,宫彦军,等.不匹配介质三层漫射方程的时间分辨漫反射[J].*光学学报*, 2005, 25(9):1254-1259. WANG X CH, SONG D C, GONG Y J, *et al.*. Time resolved diffuse reflectance of three-layered mismatched media diffusion equation[J]. *Acta Optica Sinica*, 2005, 25(9):1254-1259. (in Chinese)
- [6] 王建岗,王桂英,徐至展.光在分层介质中传输行为的蒙特卡罗模拟研究[J].*光学学报*, 2000, 20(3):346-350. WANG J G, WANG G Y, XU ZH ZH. Monte-Carlo simulation for light propagation in striated scattering medium [J]. *Acta Optica Sinica*, 2000, 20(3):346-350. (in Chinese)
- [7] 王建岗,王桂英,徐至展.散射介质中光传输行为时间特性的蒙特卡罗模拟研究[J].*光学学报*, 2001, 21(2):155-157. WANG J G, WANG G Y, XU ZH ZH. Monte carlo simulations for time characteristics of Light propagation in scattering medium[J]. *Acta Optica Sinica*, 2001, 21(2):155-157. (in Chinese)
- [8] 程树英,沈鸿元,陈美锋.用蒙特卡罗法研究折射率对光在组织中的漫反射率和吸收比的影响[J].*中国激光*, 2004, 31(2):169-172. CHENG SH Y, SHEN H Y, CHEN M F. Research on the influence of refractive index on diffuse reflectance and absorptance in tissue by monte carlo method[J]. *Chin. J. Lasers*, 2004, 31(2):169-172. (in Chinese)
- [9] 许棠,张春平,王新宇,等.连续光在生物组织中能流率分布的漫射近似和模拟[J].*光子学报*, 2003, 32(5):571-575. XU T, ZHANG CH P, WANG X Y, *et al.*. Diffusion approximation and modeling for fluence rate distribution of the CW light in biological[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2003, 32(5):571-575. (in Chinese)
- [10] LOHWASSER R, SOELKER G. Experimental and theoretical Laser-Doppler frequency spectra of a tissuelike model of a human head with capillaries[J]. *Appl. Opt.*, 1999, 38:2128-2137.
- [11] HASKELL R C, SVAASAND L O, TSAY T T, *et al.*. Boundary conditions for the diffuse equation in radiative transfer[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1994, 11:2727-2741.
- [12] RIPOLL J, NIETO-VESPERINAS M. Index mismatch for diffuse photon density waves at both flat and rough diffuse-diffuse interfaces[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1999, 16:1947-1957.

作者简介:王喜昌(1968—),男,烟台大学光电信息学院副教授,主要从事生物医学光学和颜色光学等方面的研究. E-mail: wangxichang@ytu.edu.cn